



## **Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12º ano através do ensino**

**José António Fernandes**

Universidade do Minho

Portugal

[jfernandes@ie.uminho.pt](mailto:jfernandes@ie.uminho.pt)

**Maria Manuel Nascimento**

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Portugal

[mmsn@utad.pt](mailto:mmsn@utad.pt)

**Maria do Carmo Cunha**

Escola Secundária Alberto Sampaio

Portugal

[carmo.fernandes@gmail.com](mailto:carmo.fernandes@gmail.com)

**José Miguel Contreras**

Universidad de Granada

España

[jmcontreras@ugr.es](mailto:jmcontreras@ugr.es)

### **Resumo**

No presente texto relata-se um estudo sobre o desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12º ano através do ensino regular. No estudo participaram os alunos de cinco turmas do 12º ano, num total de 115 alunos de uma escola portuguesa, a quem foram aplicadas várias questões de probabilidade condicionada na forma de teste escrito, incluindo situações com e sem reposição e sobre a inversão do eixo temporal, o condicionamento e causalidade e a falácia da conjunção. Em termos de resultados do estudo salienta-se uma aquisição do conceito de probabilidade condicionada muito pouco profunda, quer antes do ensino do conceito, quer depois, o que revela, por um lado, a sua natureza contra-intuitiva e, por outro lado, um impacto limitado do ensino regular sobre o seu desenvolvimento.

*Palavras-chave:* respostas, raciocínios, probabilidade condicionada, ensino, alunos do 12º ano.

### Abstract

The present paper reports a study on the development of the concept of conditional probability in the 12th grade students (age 17) through the regular teaching. In this study were involved students from five classes of the 12th grade, a total of 115 students from a Portuguese school. In the form of written test, the students answered to several questions about conditional probability, including situations with and without replacement and the reversal of the temporal axis, conditioning and causality and the conjunction fallacy, before and after teaching the concept. The study results points to a very shallow acquisition of the concept of conditional probability, before and even after teaching the concept. In one hand, this emphasizes the counter-intuitive nature of this concept and, in the other, a limited impact of the regular teaching in their development.

*Keywords:* answers, reasoning, conditional probability, teaching, 12th grade.

### Introdução

A importância dos conceitos de probabilidade condicionada e independência resulta, por um lado, segundo Heitele (1975), do facto de tratar-se de uma ideia estocástica fundamental e, por outro lado, segundo Batanero, Fernandes e Contreras (2009), da sua compreensão e aplicação ser fundamental na vida diária e nas aplicações de Estatística, permitindo alterar o nosso grau de crença acerca dos sucessos aleatórios a partir da aquisição de nova informação (Díaz & de la Fuente, 2005).

Também, ao nível escolar, a importância dos conceitos de probabilidade condicionada e independência é reconhecida ao fazerem parte dos programas de Matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2002) e ao constarem sistematicamente dos Exames Nacionais e Testes Intermédios de Matemática.

No entanto, a importância destes conceitos contrasta com as dificuldades que os alunos experimentam na sua aquisição, tal como a prática e a investigação têm demonstrado. As dificuldades na aquisição destes conceitos podem ser compreendidas a partir das diferentes situações em que surgem, nomeadamente envolvendo experiências com e sem reposição, a inversão do eixo temporal, o condicionamento e causalidade e a falácia da conjunção.

Fischbein e Gazit (1984) mostraram que os problemas de probabilidade condicionada são mais difíceis em experiências sem reposição do que em experiências com reposição, identificando duas concepções erróneas fundamentais no raciocínio em probabilidade condicionada dos alunos: (1) não consideram que o espaço amostral se altera em experiências sem reposição; e (2) determinam a probabilidade de acontecimentos onde não há reposição fazendo uma simples comparação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis antes e depois da primeira tentativa, em vez de fazer a comparação entre o número total de saídas. Segundo Tarr e Lannin (2005), em situações sem reposição, a probabilidade condicionada torna-se particularmente explícita porque a redução do espaço amostral do acontecimento condicionado será um subconjunto do espaço original, ou seja, a redução do espaço amostral é visível, enquanto em situações com reposição isso não acontece.

A “inversão do eixo temporal” significa que o acontecimento condicionante ocorre depois do acontecimento condicionado. Nestas situações, as dificuldades de muitos alunos devem-se à adesão a uma visão determinista, em que a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afectar algo que ocorreu antes. Por exemplo, na extracção consecutiva de duas bolas de uma urna com duas bolas brancas e duas pretas, sem reposição, Falk (1986) constatou que os estudantes consideraram que a probabilidade da primeira bola ser branca, sabendo que a segunda é branca, seria  $1/2$ . Deste modo, os estudantes atenderam à composição inicial da urna e consideraram que a segunda bola branca extraída não poderia afectar a probabilidade da primeira bola ser branca. Outros estudantes consideraram mesmo que a pergunta formulada era desprovida de sentido.

A influência da “causalidade”, segundo Tversky e Kahneman (1982), manifesta-se através de “assimetrias inferenciais” – em que as pessoas inferem com maior confiança efeitos das causas do que causas dos efeitos – e da “significação causal e diagnóstica da evidência” – em que as pessoas tendem a realçar o impacto causal dos dados para o futuro e a negligenciar as suas implicações diagnósticas acerca do passado. Por exemplo, a adesão à causalidade implica que os alunos avaliem como sendo mais provável “a filha ter olhos azuis se a mãe tem olhos azuis” do que “a mãe ter olhos azuis se a filha tem olhos azuis”, independentemente da existência de informação que contradiga essa avaliação. Obviamente, que a causalidade, através da “significação diagnóstica da evidência”, intervém também na adesão à “falácia do eixo temporal”.

Na “falácia da conjunção”, se um acontecimento  $B$  é altamente representativo de outro acontecimento  $A$ , então  $P(A \cap B) > P(A)$  (Tversky & Kahneman, 1983). Por exemplo, o acontecimento “Um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos” é avaliado como sendo mais provável do que o acontecimento “Um português teve um ou mais ataques cardíacos”, o que pode ser explicada pelo facto de os ataques cardíacos serem frequentes em portugueses com mais de 55 anos. Donde, os alunos parecem ter interpretado a conjunção da seguinte maneira: “Um português teve um ou mais ataques cardíacos se tem mais de 55 anos”.

Gras e Totahasina (1995) consideram que os conceitos de probabilidade condicionada e de independência são muito difíceis de ensinar e que, historicamente, se verifica que o primeiro é definido muito tardiamente e com recurso ao segundo. Em geral, o ensino regular de probabilidades, tal como ocorre nas salas de aula, tem um impacto reduzido na alteração das ideias erróneas dos alunos. Fernandes (1990) verificou que os alunos com experiência de ensino de probabilidades não se distinguiram dos alunos sem experiência de ensino de probabilidades relativamente aos erros cometidos em situações probabilísticas contra-intuitivas.

Neste contexto, na presente investigação estudaram-se as respostas e justificações apresentadas por alunos do 12º ano na resolução de problemas de probabilidade condicionada, antes e depois de este conceito ter sido leccionado, tendo em vista verificar em que medida o ensino do conceito altera as respostas dadas pelos alunos

### **Metodologia**

A presente investigação é parte de um estudo mais amplo, de natureza, fundamentalmente, quantitativa e com desenho descritivo e comparativo (Gall, Gall & Borg, 2003).

Participaram no estudo os alunos de cinco turmas do 12º ano de uma mesma escola secundária da cidade de Braga (região Norte de Portugal), num total de 115 alunos (designados por  $A_1, A_2, \dots, A_{115}$ ), com idades compreendidas entre os 16 e 20 anos e média 17,0 anos (idade

normal de frequência dos 12º ano) e com médias das classificações do 10º e 11º anos variando entre 7,5 e 20 valores e média global 12,7 valores.

A estes alunos foi aplicado um teste escrito constituído por 14 questões, 10 de resposta curta e quatro de escolha múltipla, sobre o conceito de probabilidade condicionada e independência, algumas delas com mais do que uma alínea. Este teste foi administrado em contexto de sala de aula, em dois momentos distintos, tendo por referência o ensino do tema de probabilidades condicionadas: no pré-ensino, imediatamente antes da leccionação do tema; e no pós-ensino, imediatamente depois da leccionação do tema. Os alunos dispuseram de 90 minutos para responder ao teste, o que se revelou um tempo suficiente.

O ensino do tema de probabilidades condicionadas decorreu ao longo de duas aulas de 90 minutos e nele intervieram dois professores, tendo um leccionado em duas turmas e o outro nas restantes três turmas.

Neste texto apresentamos apenas os resultados relativos a cinco das 14 questões do teste, cujo conteúdo primário é descrito na Tabela 1.

Tabela 1

*Conteúdo primário avaliado em cada questão*

Questão	Conteúdo
	<i>Extracção com e sem reposição</i>
1a)	Calcular a probabilidade conjunta numa experiência com reposição.
1b)	Calcular a probabilidade conjunta numa experiência sem reposição.
	<i>Eixo temporal invertido</i>
2, 3	Calcular a probabilidade quando o acontecimento condicionante ocorre depois do acontecimento condicionado.
	<i>Condicionamento e causalidade</i>
4, 5	Avaliar a probabilidade em situações em que é implícita uma relação de causa e efeito.
	<i>Falácia da conjunção</i>
6	A conjunção é avaliada como sendo mais provável do que a probabilidade de um dos seus acontecimentos simples.

Finalmente, o tratamento e a análise de dados centraram-se no estudo das respostas (correctas e incorrectas) e dos raciocínios referidos pelos alunos nas suas resoluções, tendo sido determinadas percentagens, resumida a informação em tabelas e aplicado o teste de McNemar para verificar a significância estatística (ao nível de significância de 0,05) da alteração das respostas correctas/incorrectas entre o pré-ensino e o pós-ensino.

### **Apresentação de resultados**

Nesta secção apresentam-se os resultados do estudo a partir das diferentes situações de probabilidade consideradas.

**Extracção com e sem reposição**

1. Num saco há três bolas brancas e quatro bolas pretas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.

a) Supondo que a 1ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.

b) Supondo que a 1ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.

Esta questão envolve a determinação de uma probabilidade conjunta em dois tipos de experiências: na alínea 1a) a extracção é feita com reposição (acontecimentos independentes) e na alínea 1b) a extracção é feita sem reposição (acontecimentos dependentes).

Na Tabela 2, em que se apresentam as respostas obtidas, salienta-se que, em ambas as alíneas, um pouco mais de metade dos alunos responderam correctamente e do pré-ensino para o pós-ensino constata-se um aumento da percentagem de respostas correctas pouco significativo. Também entre ambas as alíneas, quer no pré-ensino quer no pós-ensino, não se observaram grandes diferenças nas percentagens de respostas correctas, o que leva a concluir que o facto de a extracção ser feita com ou sem reposição não afectou consideravelmente as respostas dos alunos.

Tabela 2

Respostas, em percentagem, dos alunos à questão 1 ( $n=115$ )

Respostas	Questão 1a)		Questão 1b)	
	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Correcta	55,7	57,4	53,1	60,9
Incorrecta	41,7	40,0	41,7	35,6
Não respondentes	2,6	2,6	5,2	3,5

Em termos de significância estatística, o teste de McNemar não determinou diferenças estatisticamente significativas do pré-ensino para o pós-ensino em ambas as alíneas.

No caso das respostas correctas, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, os alunos recorreram à regra do produto para determinar as probabilidades pedidas, apoiando-se alguns deles na construção de um diagrama de árvore (3 alunos no pré-ensino e 16 no pós-ensino,) ou de uma tabela de dupla entrada (1 aluno no pré-ensino). Na Figura 1 exemplifica-se o uso do diagrama de árvore.

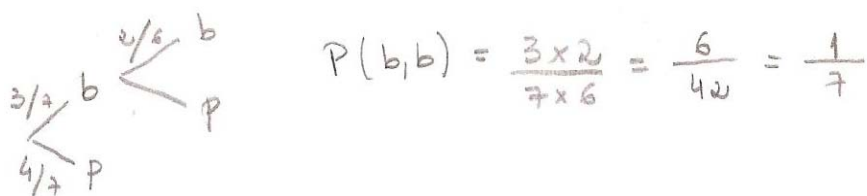


Figura 1. Resolução da questão 1b) pelo aluno A<sub>52</sub> no pós-ensino.

Nas respostas incorrectas salientou-se a não consideração da conjunção dos dois acontecimentos simples, determinando a probabilidade de apenas um deles (21 alunos no pré-ensino e 14 no pós-ensino), como se exemplifica na Figura 2.

3 B  
4 P  
A: "sein duas bolas brancas"  
$$p(A) = \frac{3}{7}$$

Figura 2. Resolução da questão 1a) pelo aluno A<sub>55</sub> no pós-ensino.

Também se encontram na origem dos erros dos alunos a adição das probabilidades em vez da sua multiplicação (21 alunos no pré-ensino e 14 no pós-ensino), a determinação incorrecta do número de casos favoráveis ou possíveis (16 alunos no pré-ensino e 19 no pós-ensino), a não consideração da reposição da primeira bola extraída no caso de 1a) (1 aluno no pré-ensino e 3 no pós-ensino) e a incorrecta aplicação da fórmula da probabilidade condicionada (5 alunos no pós-ensino). Na Figura 3 exemplifica-se o caso da adição das probabilidades simples.

$$P(B, B) = \frac{3}{7} + \frac{2}{6} = \frac{18}{42} + \frac{14}{42} = \frac{32}{42} = \frac{16}{21}$$

Figura 3. Resolução da questão 1b) pelo aluno A<sub>11</sub> no pré-ensino.

Por fim, um número considerável de alunos parece não ter feito uma interpretação correcta do enunciado (30 alunos no pré-ensino e 24 no pós-ensino), como se exemplifica na Figura 4.

3 bolas brancas  
4 bolas pretas


Tem 7 bolas, retiram-se duas então fica 5 bolas.

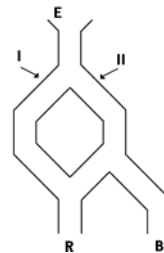
$$P(B, B) = \frac{3 \times 2}{6 \times 5} = \frac{6}{30} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Se há 6 bolas no saco, retiramos duas fica 6 x 5 e há 3 bolas brancas então é 3 x 2.

Figura 4. Resolução da questão 1a) pelo aluno A<sub>43</sub> no pós-ensino.

## Eixo temporal invertido

2. Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraímos ao acaso duas bolas da urna, uma a seguir à outra, sem repor a primeira.  
Qual a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca?
3. Solta-se uma bola em E. Se a bola sai pelo canal R, qual a probabilidade que tenha passado pelo canal I?
- 



As questões 2 e 3 envolvem o conceito de probabilidade condicionada em que os acontecimentos surgem numa sequência temporal invertida. Na Tabela 3 apresentam-se as respostas obtidas nestas duas questões.

Tabela 3

Respostas, em percentagem, dos alunos às questões 2 e 3 ( $n = 115$ )

Respostas	Questão 2		Questão 3	
	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Correcta	10,4	20,0	1,7	6,1
Incorrecta	81,8	72,2	94,8	90,4
Não respondentes	7,8	7,8	3,5	3,5

Salienta-se, nas duas questões, uma muito baixa percentagem de respostas correctas e um pequeno aumento dessa percentagem do pré-ensino para o pós-ensino. Em termos de significância estatística, do pré-ensino para o pós-ensino, o teste de McNemar determinou diferenças estatisticamente significativas na questão 2 ( $p < 0,05$ ) mas não na questão 3.

Na questão 2 a resposta correcta foi apresentada sem qualquer justificação (12 alunos no pré-ensino e 13 no pós-ensino) e recorrendo à aplicação da fórmula da probabilidade condicionada (10 alunos no pós-ensino). Na Figura 5 exemplifica-se o uso da fórmula da probabilidade condicionada.

$$p(B_1|B_2) = \frac{p(B_2 \cap B_1)}{p(B_2)} = \frac{p(B_2) \times p(B_1)}{p(B_1 \cap B_2) + p(P_1 \cap B_2)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

$$* p(P_1 \cap B_2) = p(P_1) \times p(B_2|P_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$$

$$* p(B_2|B_1) = \frac{p(B_2 \cap B_1)}{p(B_1)} \leftarrow \frac{1}{3} = \frac{p(B_2 \cap B_1)}{2/4} \leftarrow p(B_2 \cap B_1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Figura 5. Resolução da questão 2 pelo aluno A<sub>28</sub> no pós-ensino.

As respostas incorrectas deveram-se à consideração de que a segunda extracção não influencia o resultado da primeira, pelo que a probabilidade pedida era igual ao valor da probabilidade simples da primeira extracção (65 alunos no pré-ensino e 38 alunos no pós-ensino) e à incorrecta aplicação da fórmula da probabilidade condicionada (19 alunos no pós-ensino). Na Figura 6 exemplifica-se o primeiro destes raciocínios.

$$p = \frac{2}{4}$$

É indiferente que a segunda bola seja branca, por isso o n.º de bolas na primeira extracção é o completo.

Figura 6. Resolução da questão 2 pelo aluno A<sub>29</sub> no pré-ensino.

Na questão 3, as poucas respostas correctas resultaram da análise dos percursos possíveis (2 alunos no pré-ensino) e da utilização da fórmula da probabilidade condicionada (9 alunos no pós-ensino). Na Figura 7 exemplifica-se o primeiro raciocínio.

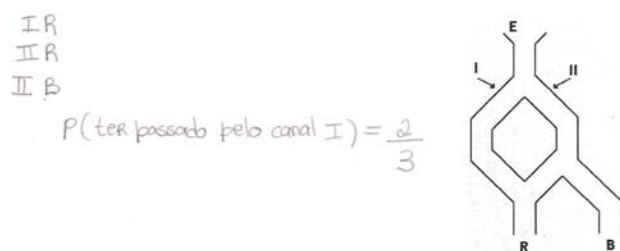


Figura 7. Resolução da questão 3 pelo aluno A<sub>78</sub> no pré-ensino.

Relativamente às respostas incorrectas, para além de outros valores, verificámos que a grande maioria dos alunos apresentou o valor 1/2 ou 50% para a probabilidade pedida (98 alunos no pré-ensino e 90 no pós-ensino), recorrendo ao diagrama de árvore, usando linguagem corrente ou sem apresentarem qualquer justificação. Na Figura 8 exemplifica-se o uso do diagrama de árvore.

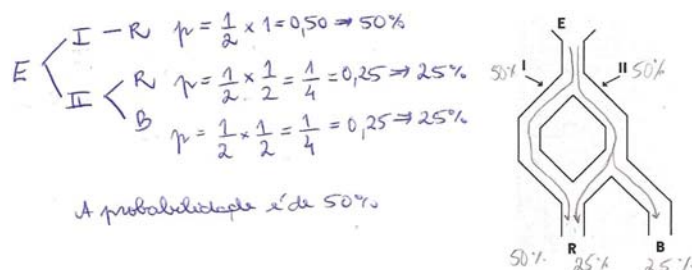


Figura 8. Resolução da questão 3 pelo aluno A<sub>28</sub> no pré-ensino.

Tal como na questão 2, também nestas respostas é possível que tenha estado subjacente a ideia de que um acontecimento que ocorre depois (sair por R) não pode influenciar a probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes (passar por I), ou seja, a adesão à “falácia do eixo temporal”.

Salienta-se ainda a utilização incorrecta da fórmula da probabilidade condicionada por 11 alunos no pós-ensino, como se exemplifica na Figura 9.

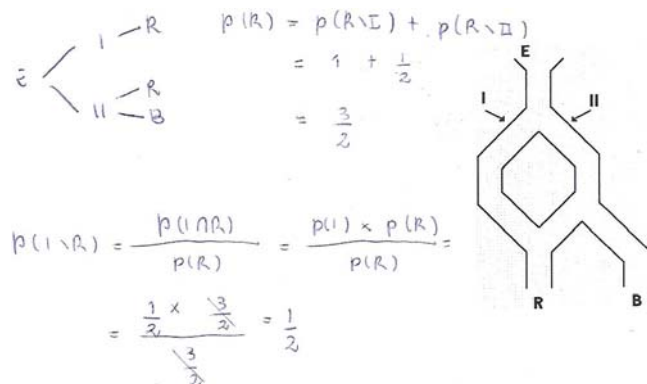


Figura 9. Resolução da questão 3 pelo aluno A<sub>26</sub> no pós-ensino.



### Condicionamento e causalidade

4. Um teste de diagnóstico de cancro foi administrado a todos os residentes de uma grande cidade onde há poucos casos de cancro. Um resultado positivo no teste é indicativo de ter cancro e um resultado negativo é indicativo de ausência de cancro.

O que é mais provável?

- a) ☐ Que uma pessoa tenha cancro se o teste diagnóstico deu positivo.  
 b) ☐ Que o teste dê positivo se uma pessoa tem cancro.  
 c) ☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Explica o raciocínio que usaste.

5. Supondo que é igual a proporção de mães e filhas com olhos azuis, qual dos acontecimentos seguintes é o mais provável?

- a) ☐ Que uma rapariga tenha olhos azuis, se a sua mãe tem olhos azuis.  
 b) ☐ Que uma mãe tenha olhos azuis, se a sua filha tem olhos azuis.  
 c) ☐ Os dois anteriores acontecimentos são igualmente prováveis.

Explica o raciocínio que usaste.

Com as questões 4 e 5 pretendeu-se avaliar a adopção da assimetria inferencial no sentido das causas para os efeitos relativamente ao sentido inverso.

Pela Tabela 4 constatamos uma baixa percentagem de respostas correctas, especialmente na questão 4, que diminuiu do pré-ensino para o pós-ensino. Em termos de significância estatística, do pré-ensino para o pós-ensino, o teste de McNemar não determinou diferenças estatisticamente significativas.

Tabela 4

Respostas, em percentagem, dos alunos às questões 4 e 5 ( $n = 115$ )

Respostas	Questão 4		Questão 5	
	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Correcta	30,4	29,5	47,0	40,0
Incorrecta	67,0	67,0	51,3	55,7
Não respondentes	2,6	3,5	1,7	4,3

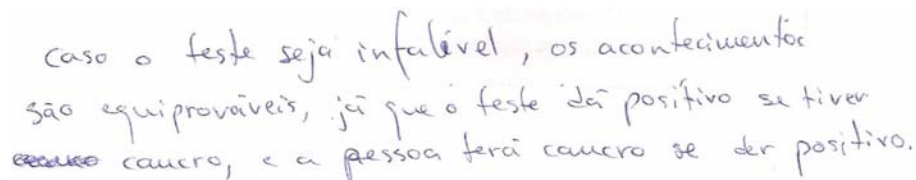
Na questão 4, a adesão à assimetria inferencial da causa (ter cancro) para o efeito (teste diagnóstico positivo) levou os alunos a responderem correctamente (opção b). Neste caso, os alunos afirmaram a prevalência da relação causa-efeito sobre a relação diagnóstica (14 alunos no pré-ensino e 13 no pós-ensino), como se exemplifica na Figura 10, e a maioria dos alunos não apresentou qualquer justificação (21 alunos no pré-ensino e no pós-ensino).

Pois o teste diagnóstico pode-se enganar dizendo que uma pessoa tem cancro e não tem mas se a pessoa fizer o teste sabendo que tem cancro, o teste é tem que ser positivo

Figura 10. Resolução da questão 4 pelo aluno A<sub>70</sub> no pós-ensino.

Já a equiprobabilidade dos acontecimentos foi afirmada pela maioria dos alunos (opção c: 67 alunos no pré-ensino e 72 no pós-ensino), com base na infalibilidade do teste e no uso

incorrecto da fórmula da probabilidade condicionada (3 alunos no pós-ensino). Na Figura 11 exemplifica-se a afirmação da infalibilidade do teste.

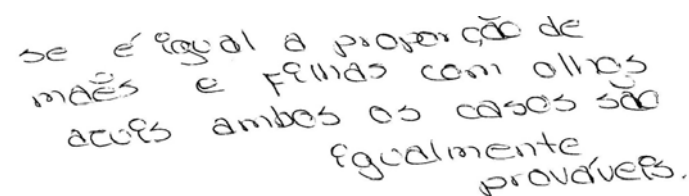


caso o teste seja infalível, os acontecimentos são equiprováveis, já que o teste dá positivo se tiver cancro, e a pessoa terá cancro se der positivo.

Figura 11. Resolução da questão 4 pelo aluno A<sub>31</sub> no pré-ensino.

Finalmente, alguns alunos seleccionaram a relação diagnóstica como sendo mais provável (opção a: 10 alunos no pré-ensino e 5 no pós-ensino).

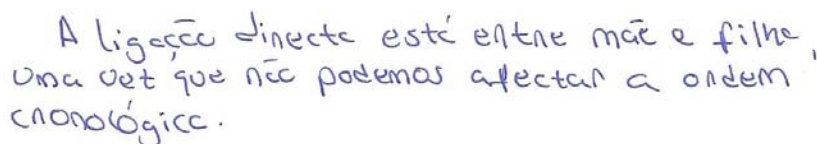
Na questão 5, a afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos (opção c) resultou da observação da igual proporção de mães e filhas com olhos azuis (41 alunos no pré-ensino e 34 no pós-ensino) e da utilização da fórmula da probabilidade condicionada (4 alunos no pós-ensino). Os restantes alunos não apresentaram qualquer justificação. Na Figura 12 exemplifica-se o primeiro tipo de raciocínio.



se é igual a proporção de mães e filhas com olhos azuis ambos os casos são igualmente prováveis.

Figura 12. Resolução da questão 5 pelo aluno A<sub>91</sub> no pré-ensino.

A relação de causa-efeito foi seleccionada por cerca de metade dos alunos (opção a: 53 alunos no pré-ensino e 58 no pós-ensino). Neste caso, as escolhas dos alunos assentaram nas duas assimetrias: na “assimetria mãe-filha” refere-se que “a rapariga depende da mãe...”, “a hereditariedade é lógica, a mãe implica a filha...” (36 alunos no pré-ensino e 37 no pós-ensino); e na “assimetria mãe-filha-pai” refere-se que “a filha pode ter olhos azuis do pai...” (6 alunos no pré-ensino e 8 no pós-ensino). Na Figura 13 exemplifica-se a primeira assimetria.



A ligação directa está entre mãe e filha, uma vez que não podemos afectar a ordem cronológica.

Figura 13. Resolução da questão 5 pelo aluno A<sub>30</sub> no pós-ensino.

Finalmente, a relação diagnóstica foi afirmada por poucos alunos (opção b: 6 alunos no pré-ensino e no pós-ensino).

### Falácia da conjunção

6. Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

- a) ☐ Um português teve um ou mais ataques cardíacos.
- b) ☐ Um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos.
- c) ☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Explica o raciocínio que usaste.

Na questão 6 compara-se a probabilidade da conjunção com a probabilidade de um dos seus acontecimentos simples, avaliando-se assim a adesão dos alunos à “falácia da conjunção”.

Pela Tabela 5 constatamos que cerca de metade dos alunos responderam correctamente à questão 6, quer no pré-ensino quer no pós-ensino. Em termos de significância estatística, do pré-ensino para o pós-ensino, o teste de McNemar não determinou diferenças estatisticamente significativas.

Tabela 5

Respostas, em percentagem, dos alunos à questão 6 ( $n = 115$ )

Respostas	Questão 6	
	Pré-ensino	Pós-ensino
Correcta	51,3	53,1
Incorrecta	44,4	45,2
Não respondentes	4,3	1,7

A selecção da resposta correcta (opção a) baseou-se no reconhecimento de que o acontecimento simples é mais amplo do que a conjunção dos acontecimentos (40 alunos no pré-ensino e no pós-ensino) ou, de forma mais precisa, que o acontecimento simples contém o acontecimento conjunto (15 alunos no pré-ensino e no pós-ensino). Na Figura 14 exemplifica-se o primeiro raciocínio.

A segunda hipótese aplica-se a um menor número de pessoas, enquanto que a primeira aplica-se a um maior número de pessoas, logo a primeira é mais provável.

Figura 14. Resolução da questão 6 pelo aluno A<sub>49</sub> no pré-ensino.

A opção b), cuja selecção significa a adesão à falácia da conjunção, depois da resposta correcta, foi a mais escolhida (41 alunos no pré-ensino e 40 alunos nos pós-ensino). Neste caso, os alunos afirmaram que uma pessoa com mais de 55 anos tem maior probabilidade de ter um ataque cardíaco, como se exemplifica na Figura 15.

Os ataques cardíacos são mais prováveis em pessoas com idade mais avançada.

Figura 15. Resolução da questão 6 pelo aluno A<sub>64</sub> no pré-ensino.

Finalmente, na opção de equiprobabilidade (opção c: 10 alunos no pré-ensino e 12 no pós-ensino) os alunos não interpretaram correctamente o enunciado ou não apresentaram qualquer justificação. Na Figura 16 exemplifica-se esta dificuldade.

Independentemente de ter mais de 55 anos ou não a probabilidade será mesma.

Figura 16. Resolução da questão 6 pelo aluno A<sub>97</sub> no pré-ensino.

### Conclusão e implicações

Do pré-ensino para o pós-ensino não se observaram alterações significativas quer ao nível das respostas, quer ao nível dos raciocínios. No caso das percentagens de respostas correctas e incorrectas verificaram-se apenas ligeiras variações, tendo o teste de McNemar determinado

diferenças estatisticamente significativas em apenas uma das sete questões que foram estudadas, especificamente na questão 2, envolvendo a “falácia do eixo temporal”.

Tal como no caso das respostas, também no caso dos raciocínios não se verificaram alterações muito significativas do pré-ensino para o pós-ensino. A única excepção, que se verificou ao longo de várias questões, foi o uso da fórmula da probabilidade condicionada no pós-ensino. A utilização da fórmula da probabilidade condicionada apenas no pós-ensino naturalmente foi uma consequência do ensino, pois antes do ensino não seria razoável esperar que os alunos a utilizassem. Além disso, muitas vezes essa fórmula foi aplicada de forma incorrecta, explicando mesmo, em algumas perguntas, a diminuição da percentagem de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino.

No caso das situações contra-intuitivas, todos os raciocínios falaciosos que foram referidos no pré-ensino também foram afirmados no pós-ensino. Entre o pré-ensino e o pós-ensino, a adesão dos alunos à falácia do eixo temporal (Falk, 1986) foi um ligeiramente menor no pós-ensino, a adesão à falácia da conjunção (Tversky & Kahneman, 1983) manteve-se ao mesmo nível nos dois momentos e a adesão a factores causais (Tversky & Kahneman, 1982) foi ligeiramente superior no pós-ensino. Estes resultados permitem afirmar que a influência do ensino regular sobre estes raciocínios falaciosos praticamente não se fez sentir, confirmando-se o que antes se tinha verificado com as respostas.

Em síntese, os resultados do estudo confirmam a pouca influência do ensino, tal como ocorreu na sala de aula, sobre o desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada, o que também tem sido verificado em outros estudos (e.g., Díaz & de la Fuente, 2005; Fernandes, 1990).

Ora, estes resultados recomendam o desenvolvimento de acções tendo em vista alterar a realidade observada. Especificamente ao nível do ensino, torna-se necessário adoptar estratégias que confrontem os alunos com a suas ideias limitadas e/ou erradas de modo a aprofundarem a sua compreensão (Fernandes, 1999).

Borocvnik e Peard (1996) destacam que o raciocínio probabilístico é diferente do raciocínio lógico ou causal e que os resultados contra-intuitivos em probabilidades surgem em níveis muito elementares, enquanto em outros ramos da matemática tais resultados surgem apenas em níveis de abstracção elevados, o que aconselha o ensino deste tema desde o início da escolarização das crianças. De outro modo, cada vez mais se consolida a visão determinista do mundo nas crianças, a qual, segundo (Fischbein, 1975), é a principal origem das suas dificuldades.

### Referências

- Batanero, C., Fernandes, J. A. & Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62, 11-18.
- Borocvnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Díaz, C. & de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC:

University of Victoria.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, J. A. (1999). Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade. Tese de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gall, M. D., Gall, J. P. & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.

Gras, R. & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A* (10º, 11º e 12º anos). Lisboa: Autor.

Tarr, J. E. & Lannin, J. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In A. J. Graham (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215 -238). Netherlands: Springer.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.